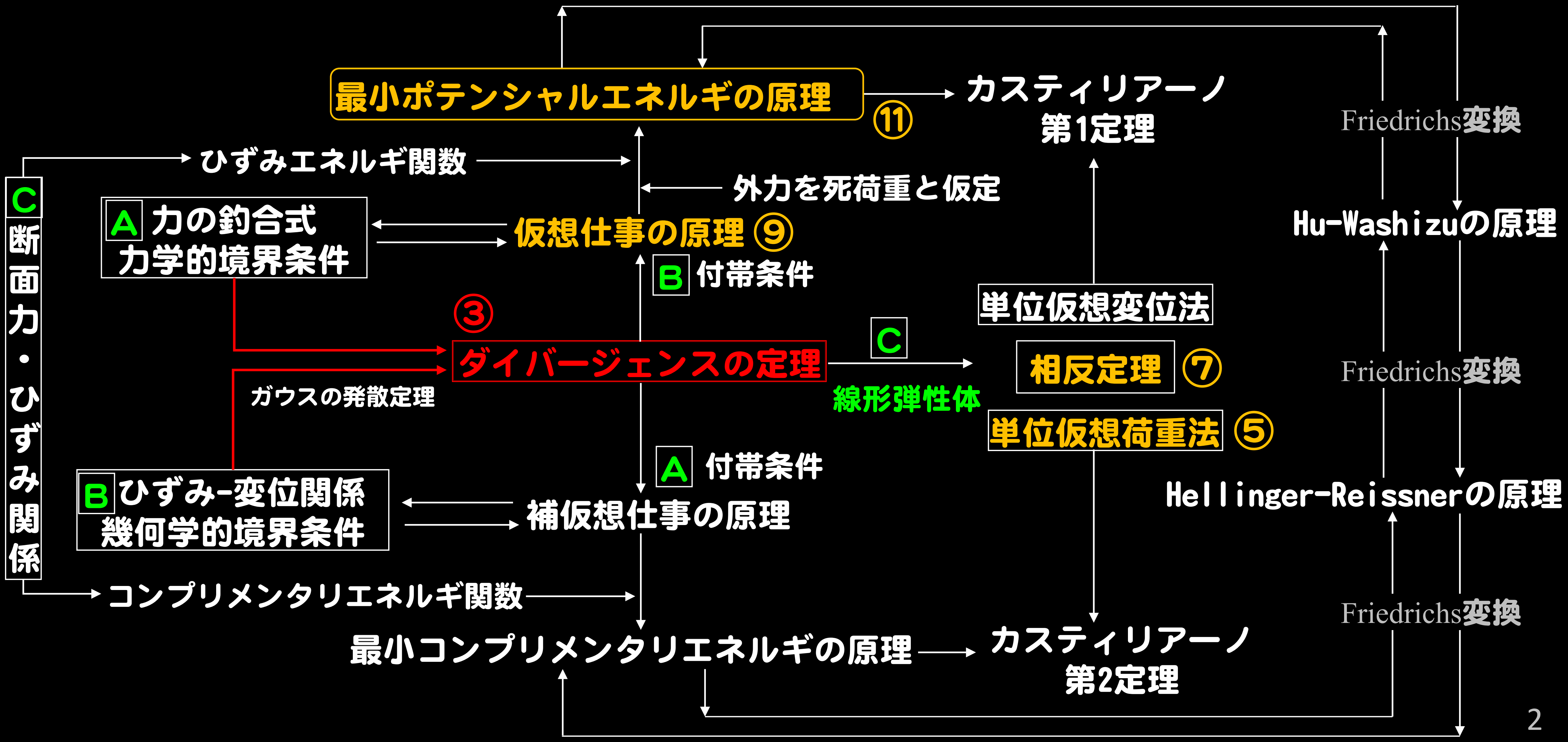
仮想仕事の原理

⑪ 最小ポテンシャルエネルギの原理

城戸將江・津田惠吾 2021.06

仕事の原理・エネルギ原理の全体像



概要1

1) 仮想仕事の原理を元とする.
2) 断面力－ひずみ関係より,
ひずみエネルギの存在を保証する.
3) 外力は死荷重と仮定する.
4) ひずみエネルギを変位で表し，全ポテンシャルエネルギΠをひずみエネルギU と外力のポテンシャルエネルギV の和として定義する.
5) 最小ポテンシャルエネルギの原理は，幾何学的境界条件を満足する変位の内，正解がΠを最小にすることを主張する.

概要2

外力のポテンシャル V

外力 —— 変位

$$\delta\Pi=\delta(U+V)=0$$

断面力 —— ひずみ

ひずみエネルギU

全ポテンシャルエネルギ

$$\Pi=U+V$$

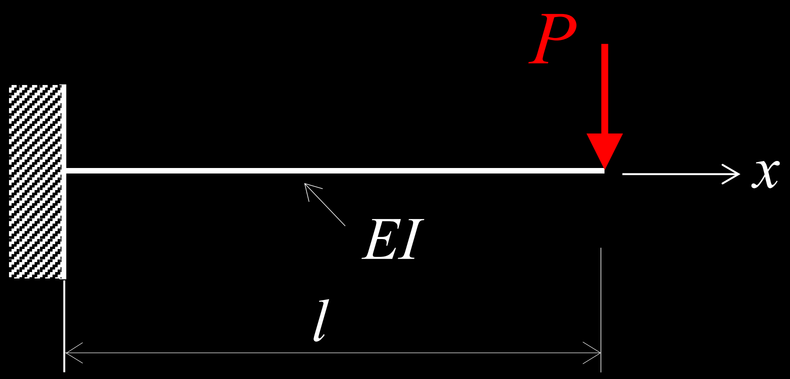
最小ポテンシャルエネルギの原理

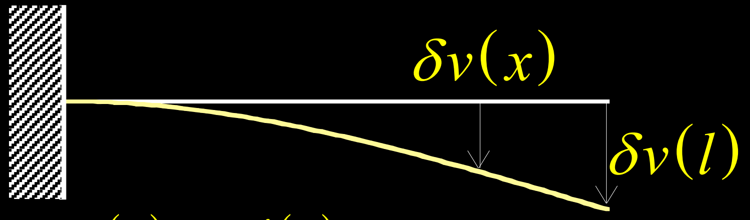
$$\Pi(v^*)\geqq\Pi(v)$$

v は正解のたわみ，
v^*は幾何学的境界条件を満足する任意のたわみ

Πの**第一変分**$\delta\Pi=0$ より，
変位で表した**釣合い式**，**力学的境界条件**が得られる

仮想仕事の原理から最小ポテンシャルエネルギの原理へ1





仮想仕事式は下式となることを⑨仮想仕事の原理で示した。

$$P\cdot\delta v(l)=\int_0^l M\cdot\delta\phi dx=\int_0^l M\cdot(-\delta v'')dx$$

上式を移項した下式を考える。

$$\int_0^l M\cdot\delta\phi dx-P\cdot\delta v(l)=0$$

左辺第1項のMに線形の断面力ーひずみ関係を用いると下式が得られる。

$$\int_0^l EI\phi\cdot\delta\phi dx-P\cdot\delta v(l)=0$$

仮想変位は幾何学的境界条件とひずみー変位関係を付帯条件とする。

$$\delta v(0)=\delta v'(0)=0\quad \delta\phi(x)=-\delta v''(x)\left(=-\left(\delta v(x)\right)''\right)$$

仮想仕事の原理から最小ポテンシャルエネルギの原理へ2

$$\int_0^l EI\phi \cdot \delta\phi dx - P \cdot \delta v(l) = 0$$

ここで，下式を定義する．

$$\Pi\left[\phi(x)\right] \equiv \int_0^l \frac{EI\phi^2}{2} dx - P \cdot v(l)$$

さらに，**ひずみ－変位関係**を用いると下式となる．

$$\boxed{\Pi\left[v(x)\right] = \int_0^l \frac{EIv''^2}{2} dx - P \cdot v(l)}$$

Πは全ポテンシャルエネルギである

ここで，たわみの**正解をv**とし，幾何学的境界条件を満足するたわみをv^*として下式を考える．

$$\boxed{\Pi\left[v^*\right] = \Pi\left[v + \delta v\right]}$$

下式を算定する．

$$\Pi\left[v^*\right] - \Pi\left[v\right] = \Pi\left[v + \delta v\right] - \Pi\left[v\right]$$

$$= \left\{\int_0^l \frac{EI\left(v + \delta v\right)''^2}{2} dx - P \cdot \left(v(l) + \delta v(l)\right)\right\}$$

$$-\left\{\int_0^l \frac{EIv''^2}{2} dx - P \cdot v(l)\right\}$$

仮想仕事の原理から最小ポテンシャルエネルギの原理へ3

$$\Pi[v^*]-\Pi[v]=\Pi[v+\delta v]-\Pi[v]$$

$$=\left\{\int_0^l \frac{EI\left(v+\delta v\right)''^2}{2}dx - P\cdot\left(v(l)+\delta v(l)\right)\right\}$$

$$-\left\{\int_0^l \frac{EIv''^2}{2}dx - P\cdot v(l)\right\}$$

$$=\underbrace{\int_0^l EIv''\left(\delta v\right)''dx - P\cdot\delta v(l)}_{\text{第一変分}}+\underbrace{\int_0^l \frac{EI\left(\delta v\right)''^2}{2}dx}_{\text{第二変分}}$$

$$\equiv \delta\Pi+\delta^2\Pi$$

ここで，$\delta\Pi$および$\delta^2\Pi$はそれぞれ，δvあるいはその微係数の1次項，2次項を集めたものである．

vは正解値であるから仮想仕事式より $\delta\Pi=0$となる．　$\because\left(\delta v\right)''=\delta v''$

また $\delta^2\Pi=\int_0^l \frac{EI\left(\delta v\right)''^2}{2}dx\geq 0$ であるから，下式が得られる．

$$\boxed{\Pi[v^*]\geq\Pi[v]}$$

上式が，最小ポテンシャルエネルギの原理の意味するところである．

仮想仕事の原理から最小ポテンシャルエネルギの原理へ4

最小ポテンシャルエネルギの原理

$$\boxed{\Pi\left[v^*\right] \geq \Pi\left[v\right]}$$

幾何学的境界条件を満足する変位の内，正解がΠを最小にすることを主張する．

Πを全ポテンシャルエネルギとよぶ

$$\boxed{\Pi\left[v(x)\right] = \int_0^l \frac{EIv''^2}{2}dx - P\cdot v(l)}$$

$$U \equiv \int_0^l \frac{EIv''^2}{2}dx \qquad V \equiv -P\cdot v(l)$$

上式で，

U:ひずみエネルギ（ひずみϕを変関数とするものをたわみvであらわしたもの）

V:外力のポテンシャル

全ポテンシャルエネルギは下式となる．

$$\boxed{\Pi = U + V}$$

変分原理

最小ポテンシャルエネルギの原理

$$\Pi[v^*] \geq \Pi[v]$$

幾何学的境界条件を満足する変位の内，正解がΠを最小にすることを主張する．

Πは関数$v(x)$の関数（→汎関数）

↓

Πを最小にする関数$v(x)$を求める

↓

変分法の問題

従って，本サイトで解説する最小ポテンシャルエネルギの原理等は，変分原理と呼ばれる．

また，変分原理はしばしばエネルギ原理と呼ばれる．

鷲津久一郎先生は，「変分原理はしばしばエネルギ原理とよばれるが，変分原理はエネルギの法則ではないことに留意されたい．dとδとの相違を了解されたい」と書かれている．

最小ポテンシャルエネルギの原理より得られること1

汎関数Πを最小にする関数$v(x)$を求める

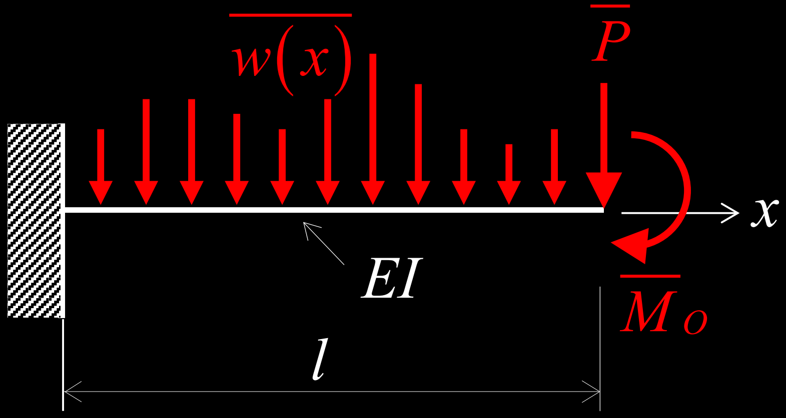
↓

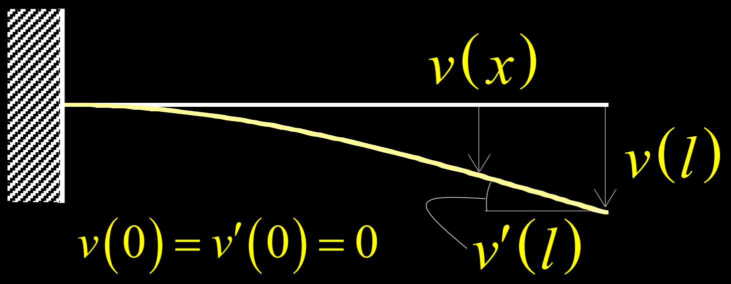
第一変分$\delta\Pi = 0$

(一般の変分問題では汎関数の停留条件)

全ポテンシャルエネルギは下式となる。

$$\Pi\left[v(x)\right] = \int_0^l \frac{EIv''^2}{2}dx - \overline{P}\cdot v(l) - \overline{M}_O\cdot v'(l) - \int_0^l \overline{w}\cdot v dx$$





上式で，上付き横棒は与えられた量であることを表している。すなわち，力学的境界上での外力である。

最小ポテンシャルエネルギの原理より得られること2

$$\Pi\left[v(x)\right]=\int_0^l \frac{EIv''^2}{2}dx-\overline{P}\cdot v(l)-\overline{M}_O\cdot v'(l)-\int_0^l \overline{w}\cdot v\,dx$$

第一変分は下式となる。

$$\delta\Pi=\int_0^l EIv''\delta v''dx-\overline{P}\cdot\delta v(l)-\overline{M}_O\cdot\delta v'(l)-\int_0^l \overline{w}\cdot\delta v\,dx$$

注　第一変分のとり方

$$\delta\left[\int_0^l \frac{EIv''^2}{2}dx\right]=\int_0^l \delta\left[\frac{EIv''^2}{2}\right]dx=\int_0^l EIv''\delta v''dx$$

$$\boxed{\delta\left[\frac{EIv''^2}{2}\right]=EIv''\delta v''}$$

$$\boxed{d\left[\frac{EIx^2}{2}\right]=EIx\,dx}$$

上式の右辺第1項は、**部分積分**を2度行うと下式となる。

$$\int_0^l EIv''\delta v''dx=\left[EIv''\delta v'-EIv'''\delta v\right]_0^l+\int_0^l EIv^{\mathrm{IV}}\delta v\,dx$$

最小ポテンシャルエネルギの原理より得られること3

$$\int_0^l EIv''\delta v''dx = \left[EIv''\delta v' - EIv'''\delta v\right]_0^l + \int_0^l EIv^{\mathrm{IV}}\delta v dx$$

幾何学的境界条件 $v(0) = v'(0) = 0$ より, $\delta v(0) = \delta v'(0) = 0$に注意すると，下式が得られる.

$$\delta \Pi = EIv''(l)\delta v'(l) - EIv'''(l)\delta v(l) - \overline{P}\cdot\delta v(l) - \overline{M}_O\cdot\delta v'(l) + \int_0^l \left(EIv^{\mathrm{IV}} - \overline{w}\right)\cdot\delta v dx$$

$$= \left\{EIv''(l) - \overline{M}_O\right\}\delta v'(l) - \left\{EIv'''(l) + \overline{P}\right\}\delta v(l) + \int_0^l \left(EIv^{\mathrm{IV}} - \overline{w}\right)\cdot\delta v dx$$

第一変分 $\delta\Pi=0$ が任意のδv に対して成立するために，下式が成立する必要がある.

$$EIv^{\mathrm{IV}} - \overline{w} = 0 \quad \Rightarrow \quad EIv^{\mathrm{IV}} = \overline{w} \quad \left(\Leftarrow M'' = -\overline{w}\right)$$

変位で表した**釣合微分方程式**

$$\begin{cases} EIv''(l) - \overline{M}_O = 0 & \Rightarrow \quad M(l) = -EIv''(l) = -\overline{M}_O \\ EIv'''(l) + \overline{P} = 0 & \Rightarrow \quad Q(l) = -EIv'''(l) = \overline{P} \end{cases}$$

変位で表した**力学的境界条件**

ポイント1

1) ひずみエネルギU

梁の場合，単位長さ当たりのひずみエネルギU^*を下式で定義する．
ひずみϕで微分すると，力Mが得られるものとして定義したことになる．

$$U^* \equiv \int_0^{\phi} M d\phi = \int_0^{\phi} EI\phi d\phi = \frac{EI\phi^2}{2}$$

梁全体ひずみエネルギUは，梁の長さ方向に上式を積分すればよい．

$$U = \int_0^l \frac{EI\phi^2}{2} dx$$

全ポテンシャルエネルギでのひずみエネルギの表記は，ひずみ一変位関係を用い，変位で表記し，下記のようになる．

$$\boxed{U \equiv \int_0^l \frac{EIv''^2}{2} dx}$$

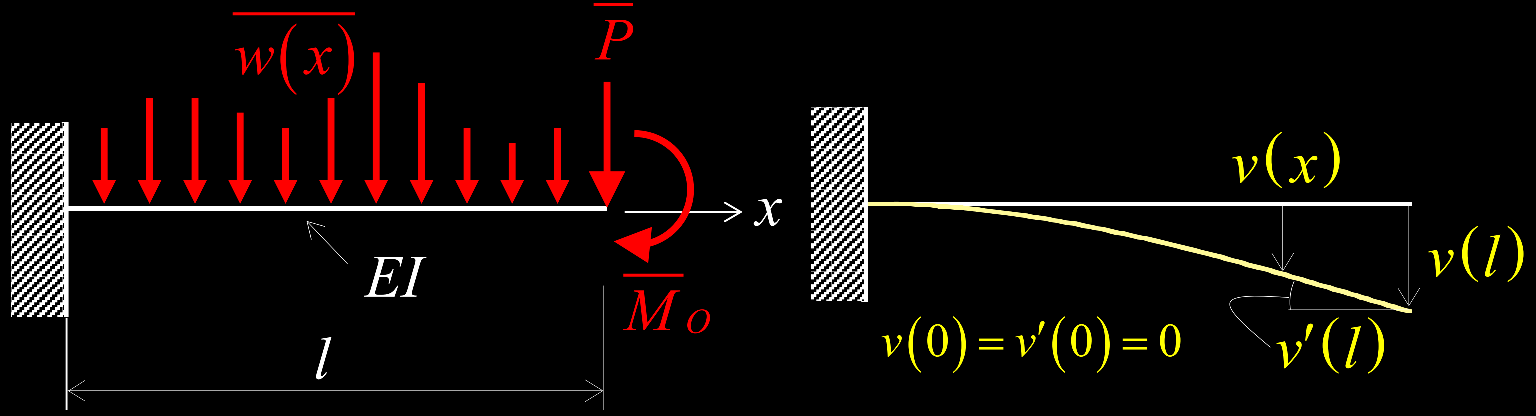
ポイント2

2) 外力のポテンシャルV

V=−外力×外力の作用点の作用方向の変位

下図の場合の外力のポテンシャルは下式のようになる.

$$V=-\overline{P}\cdot v(l)-\overline{M}_O\cdot v'(l)-\int_0^l \overline{w}\cdot v dx$$



まとめ

1) 最小ポテンシャルエネルギの原理：
幾何学的境界条件を満足する変位の内，Πを最小にする変位が正解を与えることを主張する．

2) 最小ポテンシャルエネルギの原理より，変位で表した釣合い式・力学的境界条件が得られる．

次の解説について

最小ポテンシャルエネルギの原理を用いた例題を

⑫ 最小ポテンシャルエネルギの原理 例題

で解説します．

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています．

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します．

質問等の送付先は，ホームページに示しています．

2021年6月版

仮想仕事の原理とエネルギ原理 トラス, 梁, 骨組
鹿島出版会 2019年9月